Le signe de $g'(x)$ sur $\mathbf{R}_+$ est celui de $1-x^2$:

x		-1		1	
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

d'où

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↗	$1-\ln 2$	↘	$-\infty$

2°/• On a : $g(0)=0$ et $\forall x \in]0,1]$, $g(x)>0$ (d'après le tableau de variations de g) donc 0 est la seule solution de l'équation $g(x)=0$ sur $[0,1]$

• g est continue et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]-\infty, 1-\ln 2]$ et comme $0 \in]-\infty, 1-\ln 2]$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha \in]1,+\infty[$ par g.

Conclusion : L'équation $g(x)=0$ admet 2 solutions 0 et $\alpha > 1$.

3°/ On a le tableau de variations de g :

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	0	(+) ↗	$1-\ln 2$	↘	0	(−) ↘	$-\infty$

d'où le tableau de signe de g :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	

4°/a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x^2}\dfrac{\ln(x^2+1)}{}$

Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{\ln(X+1)}{X} = 1$